Tampereen yliopisto

Jaakko Tervonen

RIEMANN-INTEGRAALIN MÄÄRITELMISTÄ

Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Kandidaatintyö
Kesäkuu 2019

TIIVISTELMÄ

Jaakko Tervonen: Riemann-integraalin määritelmistä
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Teknis-luonnotieteellinen tutkinto-ohjelma
Kesäkuu 2019

Työssä Riemann-integraali määriteltiin ensiksi käyttäen Riemannin summia ja myöhemmin todistettiin, että Riemann-integraali voidaan yhtäpitävästi määritellä asettamalla ala- ja yläintegraalit yhtä suureksi. Jos ala- ja yläintegraali ovat erisuuret, niin funktio ei ole tällöin Riemann-integroituva.

Ala- ja yläintegraalit määriteltiin työssä käyttäen ala- ja yläsummaa. Työn loppupuolella osoitettiin, että ala- ja yläintegraali voidaan määritellä myös hyödyntäen ala- ja yläporrasfunktioiden integraaleja.

Avainsanat: Riemann-integraali, Riemannin summa, alaintegraali, yläintegraali, porrasfunktio

SISÄLLYSLUETTELO

1 JOHDANTO

Sir Isaac Newton (1642-1727) ja *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716) kehittivät integraalin käsitettä yhtäaikaisesti toisistaan riippumatta 1600-luvun loppupuolella lähestyen asiaa hyvin erilaisista näkökulmista. He oivalsivat, että integrointi on derivaatan käänteisoperaatio ja määrittelivät funktion f määrätyn integraalin yli välin $[a, b]$ juurikin antiderivaatan kautta asettamalla:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

missä $F'(x) = f(x)$ [4]. Tämä on ongelmallinen tapa määrittää integraali, sillä läheskään kaikilla funktioilla ei ole olemassa antiderivaattaa. Tästä esimerkkinä ovat funktiot, joilla on määrittelyjoukossaan epäjatkuvuuskohdassa hyppy. Newtonin ja Leibnizin kehittämän määritelmän perusteella ei kyetty todistamaan edes jatkuvia funktioita integroituviksi [4]. Lisäksi integraalin määrittely derivaatan käänteisoperaationa ei anna täysin selkeää kuvaa integraalista mittaamisen työkaluna.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) määritteli 1820-luvulla ensimmäisenä määrätyn integraalin funktiolle riippumatta siitä, oliko funktiolla antiderivaattaa vai ei. Tämä määritelmä perustui summan

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1})$$

raja-arvoon ja se oli voimassa vain jatkuville funktioille. [1, s.121] 1850-luvulla Cauchyn työn pohjalta *Georg Friedrich Bernhard Riemann* (1826-1866) kehitti integroimisteorian, jonka avulla integroituvuus voidaan määrittää jokaiselle rajoitetulle funktiolle suljetulla välillä. [4] Tätä pidetään integraalin ensimmäisenä tarkkana määritelmänä. Tässä määritelmässä integraalia lähestyttiin summien rajaprosessin kautta ja se erotti integroinnin omaksi osakseen derivoinnista. Näin määritellystä integraalista käytetään kehittäjänsä mukaan nimitystä Riemann-integraali.

Myös Riemann-integraalissa on joitakin heikkouksia. Se vaatii funktiolta melko tiukkojakin rajoituksia, sillä funktion on oltava määritelty ja rajoitettu rajoitetulla ja suljetulla välillä, jotta funktio olisi Riemann-integroituva. Myöhemmin on määritelty ja tutkittu erilaisia integraaleja, joista lähes kaikki ovat jonkinlaisia laajennuksia Riemann-integraalista. Näiden tarkoituksena on nimenomaan korvata Riemann-integraalin asettamia rajoituksia antamalla joustavampi määritelmä integraalille. Laajennuksista merkittävin on *Henri Lebesguen* (1875-1941) kehittämä mittateoriaan perustuva Lebesgue-integraali. Laajennuksien ymmärtämisen kannalta on melkein välttämätöntä, että hallitsee Riemann-integraalin hyvin.

Integraalilaskenta muodostaa perustan modernille matematiikalle ja luonnontieteelle yhdessä differentiaalilaskennan kanssa. Integraalilaskennalle löytyy lukuisia sovelluskohteita esimerkiksi tekniikan aloilta. [2] Tässä työssä tarkastellaan Riemann-integraalin määritelmiä. Riemann-integraalin ominaisuuksia tai laajennuksia ei käsitellä työssä. Ensiksi luvussa 2 käydään läpi työn kannalta tärkeät käsitteet supremum ja infimum. Luvussa 3 esitetään ensiksi Riemann-integraalin määritelmä hyödyntäen Riemannin summia, sitten ala- ja yläintegraali ja lopuksi ala- ja yläporrasfunktioiden integraali. Luvussa 4 todistetaan, että Riemann-integroituvuus voidaan määrittää yhtäpitävästi ala- ja yläintegraalien avulla ja että ala- ja yläintegraaleissa voidaan käyttää ala- ja yläsumman sijaan ala- ja yläporrasfunktioiden integraaleja.

2 SUPREMUM JA INFIMUM

Reaalilukujoukko S on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa reaaliluku b, joka on suurempaa tai yhtä suurta kuin jokainen joukon S alkio. Tällöin sanotaan, että luku b on joukon S *yläraja*. Lisäksi jokainen ylärajaa b suurempi luku on myös joukon S yläraja reaalilukujen transitiivisuuden nojalla.

Määritelmä 2.1. Olkoon epätyhjä reaalilukujoukko S ylhäältä rajoitettu. Tällöin reaaliluku β on joukon S supremum, jos luvulla β on seuraavat ominaisuudet:

(a) $x \leq \beta$ kaikilla $x \in S$ ja

(b) jos $\epsilon > 0$, niin on olemassa $x_0 \in S$, jolle $x_0 > \beta - \epsilon$.

Joukon S supremumia merkitään $\beta = \sup S$.

Lause 2.1. *Joukon S supremum $\beta = \sup S$ on joukon S pienin yläraja.*

Todistus. Olkoon β joukon S supremum. Tällöin supremumin määritelmän 2.1 kohdan (a) perusteella β on suurempi kuin jokainen joukon S alkio, joten β on joukon S yläraja. Koska mikä tahansa lukua β pienempi luku voidaan kirjoittaa muodossa $\beta - \epsilon$, missä $\epsilon > 0$, niin supremumin määritelmän kohdan (b) nojalla on olemassa sellainen luku $x_0 \in S$, jolle $x_0 > \beta - \epsilon$. Toisin sanoen yksikään lukua β pienempi luku $\beta - \epsilon$ ei voi olla joukon S yläraja, sillä joukossa S on ainakin yksi tätä suurempi alkio x_0. Täten luku β on joukon S pienin yläraja. $\square$

Kunta- ja järjestysaksioomat eivät takaa, että jokaisella ylhäältä rajoitetulla epätyhjällä joukolla olisi supremum. Esimerkiksi joukolla

$$\emptyset \neq S = \{s : s \in \mathbb{Q} \text{ ja } s^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$$

ei ole supremumia rationaalilukujen joukossa, vaikka joukko onkin ylhäältä rajoitettu. Reaalilukujen joukolla on puolestaan tämä ominaisuus, jota sanotaan *täydellisyysaksioomaksi*. Tämä erottaa reaaliluvut muista järjestetyistä kunnista.

Täydellisyysaksiooma. Jos epätyhjä reaalilukujoukko on ylhäältä rajoitettu, niin tällöin joukolla on supremum.

Lause 2.2. *Ylhäältä rajoitetun epätyhjän joukon S supremum $\beta = \sup S$ on yksikäsitteinen.*

Todistus. Oletetaan, että luvut β_1 ja β_2 ovat joukon S supremumeja. Tällöin molemmat näistä luvuista ovat joukon S ylärajoja määritelmän 2.1 ehdon (a) nojalla. Määritelmän 2.1 ehdon (b) perusteella yksikään lukua β pienempi luku ei ole yläraja. Toisin sanoen

$$\beta_1 \leq \beta_2,$$

sillä β_1 on supremum ja β_2 on yläraja. Toisaalta

$$\beta_2 \leq \beta_1,$$

sillä β_2 on supremum ja β_1 on yläraja. Täten on oltava $\beta_1 = \beta_2$, joten supremum on yksikäsitteinen. □

Lause 2.3. *Olkoot A ja B epätyhjiä reaalilukujoukkoja. Jos $A \subset B$ ja joukko B on ylhäältä rajoitettu, niin tällöin $\sup A \leq \sup B$.*

Todistus. Olkoot A ja B epätyhjiä reaalilukujoukkoja sekä $A \subset B$ ja olkoon joukko B ylhäältä rajoitettu. Tällöin myös A on ylhäältä rajoitettu, sillä jokainen joukon A piste kuuluu myös joukkoon B. Nyt täydellisyysaksiooman nojalla joukoilla A ja B on supremumit.

Todistetaan lause epäsuoralla todistuksella. Oletetaan, että $\sup A > \sup B$. Lauseen 2.1 nojalla $\sup A$ on joukon A pienin yläraja, joten $\sup B$ ei voi olla joukon A yläraja. Toisaalta $\sup B$ on joukon B yläraja, joten

$$b \leq \sup B \quad \text{jokaisella } b \in B. \tag{2.1}$$

Koska $A \subset B$, niin yhtälö (2.1) on voimassa jokaisella joukon A alkiolla, joten $\sup B$ on oltava joukon A yläraja, mikä on ristiriita. Täten $\sup A \leq \sup B$. □

Reaalilukujoukko on *alhaalta rajoitettu*, jos on olemassa reaaliluku a, joka on pienempää tai yhtä suurta kuin jokainen joukon S alkio. Tällöin sanotaan, että a on joukon S *alaraja*. Lisäksi jokainen alarajaa a pienempi luku on myös joukon S alaraja reaalilukujen transitiivisuuden nojalla. Joukko S on *rajoitettu*, jos se on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu.

Määritelmä 2.2. Olkoon epätyhjä reaalilukujoukko S alhaalta rajoitettu. Tällöin reaaliluku α on joukon S infimum, jos luvulla α on seuraavat ominaisuudet:

(a) $x \geq \alpha$ kaikilla $x \in S$ ja

(b) jos $\epsilon > 0$, niin on olemassa $x_0 \in S$, jolle $x_0 < \alpha + \epsilon$.

Joukon S infimumia merkitään $\alpha = \inf S$.

Lause 2.4. *Joukon S infimum $\alpha = \inf S$ on joukon S suurin alaraja.*

Todistus. Todistus menee samaan tapaan kuin lauseen 2.1 todistus. □

Lause 2.5. *Jos epätyhjä joukko S on alhaalta rajoitettu, niin tällöin joukolla S on infimum.*

Todistus. Olkoon epätyhjä reaalilukujoukko S alhaalta rajoitettu. Tällöin on olemassa jokin alaraja m, joka toteuttaa ehdon

$$m \leq s \quad \text{jokaisella} \quad s \in S.$$

Tutkitaan nyt joukkoa $-S = \{-s : s \in S\}$. Joukko $-S$ on ylhäältä rajoitettu, sillä

$$-s \leq -m \quad \text{jokaisella} \quad -s \in -S.$$

Joukolla $-S$ on olemassa supremum $\beta = \sup(-S)$ täydellisyysaksiooman nojalla. Supremumin määritelmän 2.1 (a)-kohdan nojalla

$$-s \leq \beta \quad \text{jokaisella} \quad -s \in -S,$$

mistä saadaan, että

$$s \geq -\beta \quad \text{jokaisella} \quad s \in S.$$

Täten luvulla $-\beta$ on infimumin määritelmän 2.2 ominaisuus (a). Olkoon nyt $\epsilon > 0$. Supremumin määritelmän 2.1 (b)-kohdasta seuraa, että on olemassa sellainen luku $-s_0 \in -S$, että

$$\beta - \epsilon < -s_0.$$

Tästä saadaan, että joukossa S on jokin alkio s_0, jolle

$$-\beta + \epsilon > s_0.$$

Luvulla $-\beta$ on siis infimumin määritelmän 2.2 ominaisuus (b). Näin ollen alhaalta rajoitetulla epätyhjällä reaalilukujoukolla S on infimum. □

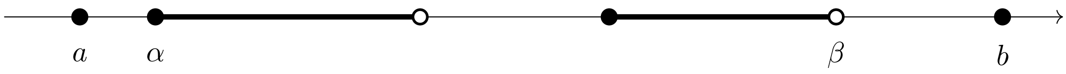
Lause 2.6. *Alhaalta rajoitetun epätyhjän joukon S infimum $\alpha = \inf S$ on yksikäsitteinen.*

Todistus. Todistus menee samaan tapaan kuin lauseen 2.2 todistus. □

Lause 2.7. *Olkoot A ja B epätyhjiä reaalilukujoukkoja. Jos $A \subset B$ ja joukko B on alhaalta rajoitettu, niin tällöin $\inf A \geq \inf B$.*

Todistus. Todistus menee samaan tapaan kuin lauseen 2.3 todistus. □

Reaalilukujoukon S supremumia ja infimumia pystytään havainnollistamaan geometrisesti reaalilukujanalla, kuten kuva 2.1 osoittaa. Tässä kuvassa joukko S on tummennettujen janojen yhdiste. Joukon S supremum on luku $\beta = \sup S$ ja infimum on luku $\alpha = \inf S$. Joukon S supremum β ei kuulu joukkoon S toisin kuin joukon S infimum α. Luvun β oikealla puolella ei ole yhtään joukon S pistettä, mutta joukon S pisteistä ainakin yksi on



Kuva 2.1. *Infimum ja supremum geometrisesti.*

oikealla puolella mitä tahansa lukua β pienempää lukua. Vastaavasti luvun α vasemmalla puolella ei ole yhtään joukon S pistettä, mutta minkä tahansa lukua α suuremman luvun vasemmalla puolella on ainakin yksi joukon S piste. Kuvassa b on jokin joukon S yläraja ja a on jokin alaraja.

3 RIEMANN-INTEGRAALI

Alaluvussa 3.1 määritellään Riemann-integraali käyttäen Riemannin summaa. Tämä määritelmä on ymmärtämisen kannalta hyvä lähtökohta, mutta integraalien tutkiminen tämän määritelmän avulla on joissain tapauksissa vaikeahkoa. Alaluvussa 3.2 esitetään vaihtoehtoinen, teknisesti parempi määritelmä Riemann-integraalin tutkimiseen. Luvun lopuksi käsitellään vielä porrasfunktioita ja niiden integraaleja, joiden yhteys ala- ja yläintegraaliin todistetaan luvussa 4.

3.1 Määrittely Riemannin summan avulla

Väli $[a, b]$ voidaan jakaa osaväleihin

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n], \tag{3.1}$$

jossa

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b. \tag{3.2}$$

Täten millä tahansa joukkolla, jossa on $n + 1$ kappaletta pisteitä ja joka toteuttaa ehdon (3.2), voidaan määrittää välin $[a, b]$ *jako* P, jota merkitään

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}. \tag{3.3}$$

Joukon P alkioita $x_0, x_1, \dots, x_n$ kutsutaan *jakopisteiksi*. Jaon P *normi* on pisimmän osavälin (3.1) pituus ja sitä merkitään $\|P\|$. Tämä voidaan esittää seuraavasti:

$$\|P\| = \max_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1}).$$

Jos P ja P' ovat välin $[a, b]$ jakoja, niin tällöin P' on *hienonnus*, jos jokainen jaon P jakopiste on myös joukon P' jakopiste. Toisin sanoen jako P' on hienonnus jaosta P, jos jako P' on muodostettu lisäämällä jakopisteitä jakoon P. Jos f on määritelty välillä $[a, b]$, niin silloin summa

$$\sigma(f, P, c) = \sum_{j=1}^{n} f(c_j)(x_j - x_{j-1}),$$

missä

$$x_{j-1} \leq c_j \leq x_j \quad \text{ja} \quad 1 \leq j \leq n,$$

on funktion f *Riemannin summa* yli jaon $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ pistein $c = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Puhuttaessa funktion f Riemannin summasta yli välin $[a, b]$ tarkoitetaan samaa asiaa. Usein kirjoitetaan lyhyemmin $\sigma(f, P, c) = \sigma$, jos asiayhteydestä selviävät funktio f, jako P ja pistejoukko c. Koska pisteet c_j voidaan valita mielivaltaisesti jokaiselta osaväliltä $[x_{j-1}, x_j]$, niin funktiolla f on ääretön määrä Riemannin summia jokaisella jaolla P. [3]

Määritelmä 3.1. Olkoon funktio f määritelty suljetulla välillä $[a, b]$. Sanotaan, että funktio f on *Riemann-integroituva* välillä $[a, b]$, jos on olemassa reaaliluku L, jolla on seuraava ominaisuus. Kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa jokin $\delta > 0$, joka toteuttaa ehdon

$$|\sigma - L| < \epsilon,$$

olipa σ mikä tahansa Riemannin summa yli välin $[a, b]$ jaon P, jolla on voimassa ehto $\|P\| < \delta$. Tällöin sanotaan, että reaaliluku L on funktion f *Riemann-integraali* yli välin $[a, b]$ ja sitä merkitään

$$\int_a^b f(x)\,dx = L.$$

Usein puhutaan lyhyemmin integroituvuudesta ja integraalista, kun tarkoitetaan Riemann-integroituvuutta ja Riemann-integraalia. Myöskin, kun sanotaan, että integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ on olemassa, tarkoittaa se samaa kuin sanottaisiin, että f on Riemann-integroituva. [3]

Lause 3.1. *Jos funktio f on Riemann-integroituva, niin tällöin $\int_a^b f(x)\,dx = L$ on yksikäsitteinen.*

Todistus. Oletetaan, että L_1 ja L_2 toteuttavat määritelmän 3.1 ehdot. Olkoot $\epsilon > 0$ ja σ mikä tahansa jaon P Riemannin summa. Toisin sanoen on olemassa sellaiset luvut $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$, että

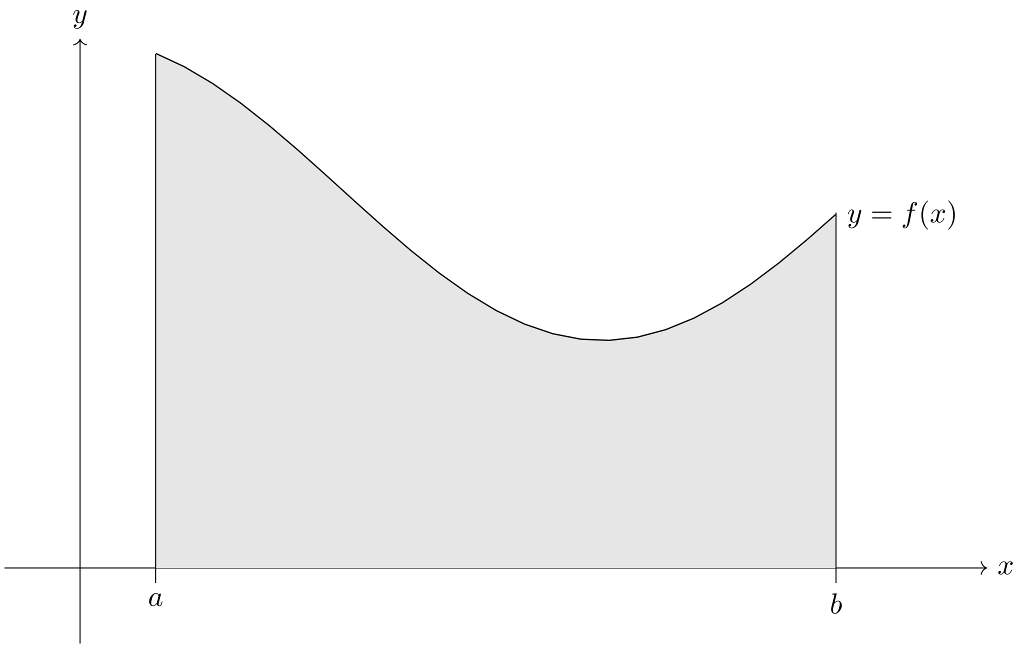
$$\begin{aligned} &|\sigma - L_1| < \epsilon/2, \text{ jos } \|P\| < \delta_1 \quad \text{ja} \\ &|\sigma - L_2| < \epsilon/2, \text{ jos } \|P\| < \delta_2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Merkitään $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Jos nyt valitaan jako P, joka toteuttaa ehdon $\|P\| < \delta$, niin saadaan, että

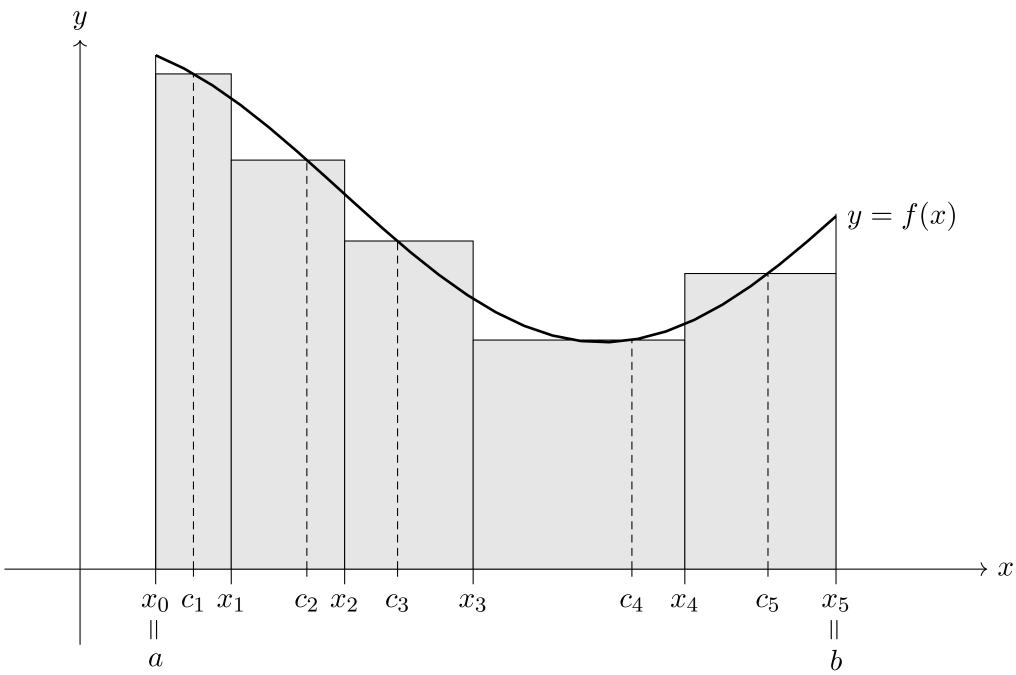
$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - L_2 + \sigma - \sigma| \\ &= |L_1 - \sigma - (L_2 - \sigma)| \\ &\leq |L_1 - \sigma| + |L_2 - \sigma| \quad \text{kolmioepäyhtälö} \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \quad \text{yhtälö (3.4)} \end{aligned}$$

Oletuksen perusteella tämä on voimassa kaikilla $\epsilon > 0$, joten on oltava $|L_1 - L_2| = 0$. Täten $L_1 = L_2$ eli $\int_a^b f(x)dx$ on yksikäsitteinen. $\square$

Kuvassa 3.1 on havainnollistettu integraalia geometrisesti ja kuvassa 3.2 Riemannin summaa. Kuvissa oletetaan, että $f(x) > 0$, jolloin kuvista saadaan selkeämpiä.



Kuva 3.1. *Riemann-integraali geometrisesti.*



Kuva 3.2. *Riemannin summa geometrisesti.*

Käyrän alla olevan pinta-alan määritteleminen ja laskeminen on matemaattisessa analyysissä keskeinen ongelma, joka on osaltaan johtanut integraalin käsitteen kehittymiseen [4]. Intuitiivisesti ajatellen, kun pienennetään jaon normia $\|P\|$, niin Riemannin summan avulla laskettu pinta-ala lähenee käyrän alla olevaa pinta-alaa, joka on käyrän $y = f(x)$, x-akselin sekä suorien $x = a$ ja $x = b$ rajaama ala. Täten määritelmää 3.1 on järkevää havainnollistaa geometrisesti käyrän alla olevana pinta-alana, joka näkyy kuvassa 3.1 harmaana alueena. Käyrän alla oleva pinta-ala vastaa funktion Riemann-integraalin arvoa, jos funktio on integroituva välillä $[a, b]$. Muussa tapauksessa käyrän alla olevaa pinta-alaa ei voida määrittää Riemann-integraalin avulla. Jos kuvassa olisi $f(x) < 0$, niin pinta-ala olisi integraalin vastaluku eli itse integraalin arvo olisi negatiivinen.

Kuvassa 3.2 jokaisen pylvään kanta on x-akselilla ja sen leveys on kyseisen osavälin pituus. Pylvään korkeus on mielivaltaisessa osavälin pisteessä c_j lasketun funktion f arvo $f(c_j)$. Näin ollen j:nnen pylvään pinta-ala on $f(c_j)(x_j - x_{j-1})$. Funktion f Riemannin summa yli välin $[a, b]$ jaon $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_5\}$ pistein $c = \{c_1, c_2, \ldots, c_5\}$ on kaikkien näiden pylväiden yhteenlaskettu pinta-ala.

Lause 3.2. *Olkoon $M > 0$ jokin reaaliluku. Jos jokaiselle $\delta > 0$ on olemassa sellaiset Riemannin summat σ_1 ja σ_2 yli minkä tahansa välin $[a, b]$ jaon P, jolle $\|P\| < \delta$, että ehto*

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \geq M$$

on voimassa, niin tällöin funktio f ei ole Riemann-integroituva.

Todistus. Osoitetaan, että jos $\int_a^b f(x)\,dx$ on olemassa, niin kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa jokin $\delta > 0$, jolle $|\sigma_1 - \sigma_2| < \epsilon$, jos σ_1 ja σ_2 ovat funktion f Riemannin summia yli välin $[a, b]$ jakojen P_1 ja P_2 tässä järjestyksessä ja näiden jakojen normit ovat pienempää kuin δ. Lause seuraa tästä, kun merkitään $\epsilon = M$, valitaan sellaiset jaot P_1 ja P_2, että $\|P_1\| = \|P_2\| = \|P\|$, ja otetaan negaatio tästä.

Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa $\delta > 0$, jolla seuraavat ehdot ovat voimassa

$$\begin{aligned} &|\sigma_1 - L| < \epsilon/2, \text{ jos } \|P_1\| < \delta \quad \text{ja} \\ &|\sigma_2 - L| < \epsilon/2, \text{ jos } \|P_2\| < \delta. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Nyt

$$\begin{aligned} |\sigma_1 - \sigma_2| &= |\sigma_1 - \sigma_2 + L - L| \\ &= |\sigma_1 - L - (\sigma_2 - L)| \\ &\leq |\sigma_1 - L| + |\sigma_2 - L| && \text{kolmioepäyhtälö} \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. && \text{yhtälö (3.5)} \end{aligned}$$

aina, kun $\|P_1\| < \delta$ ja $\|P_2\| < \delta$. □

Lause 3.3. *Jos funktio f on rajoittamaton suljetulla välillä $[a, b]$, niin tällöin funktio f ei ole Riemann-integroituva välillä $[a, b]$.*

Todistus. ([3, Theorem 3.1.2]). Näytetään, että jos funktio f on rajoittamaton välillä $[a,b]$, P on mikä tahansa välin $[a,b]$ jako ja $M > 0$, niin on olemassa Riemannin summat σ ja σ' yli jaon P, jotka toteuttavat ehdon

$$|\sigma - \sigma'| \geq M. \tag{3.6}$$

Tällöin lauseen 3.2 nojalla funktio f ei ole integroituva ja ei täten voi toteuttaa määritelmän 3.1 ehtoja.

Olkoon

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} f(c_j)(x_j - x_{j-1})$$

funktion f Riemannin summa yli välin $[a,b]$ jaon P. Tällöin on oltava jokin kokonaisluku i joukossa $\{1,2,\ldots,n\}$, joka toteuttaa ehdon

$$|f(c) - f(c_i)| \geq \frac{M}{x_{i-1} - x_i} \tag{3.7}$$

jollain arvolla $c \in [x_{i-1}, x_i]$, sillä jos näin ei olisi, niin saataisiin, että

$$|f(x) - f(c_j)| < \frac{M}{x_j - x_{j-1}}, \text{ missä } \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j \quad \text{ja} \quad 1 \leq j \leq n. \tag{3.8}$$

Täten hyödyntämällä kolmioepäyhtälöä ja yhtälöä (3.8) saadaan, että

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= |f(c_j) + f(x) - f(c_j)| \\
&\leq |f(c_j)| + |f(x) - f(c_j)| \\
&\leq |f(c_j)| + \frac{M}{x_j - x_{j-1}}, \text{missä} \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j \quad \text{ja} \quad 1 \leq j \leq n.
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$|f(x)| \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(|f(c_j)| + \frac{M}{x_j - x_{j-1}} \right), \text{missä} \quad a \leq x \leq b,$$

mikä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että f olisi rajoittamaton välillä $[a,b]$. Nyt oletetaan, että c toteuttaa yhtälön (3.7) ja tarkastellaan Riemannin summaa

$$\sigma' = \sum_{j=1}^{n} f(c'_j)(x_j - x_{j-1})$$

yli saman jaon P, jossa

$$c'_j = \begin{cases} c_j, & j \neq i \\ c, & j = i. \end{cases}$$

Riemannin summa σ' on siis muuten sama kuin σ, mutta piste c_i on korvattu pisteellä c.

Käyttämällä yhtälöä (3.7) nähdään, että

$$|\sigma - \sigma'| = |f(c) - f(c_i)|(x_i - x_{i-1}) \geq M.$$

Täten päästiin ehtoon (3.6), joten f ei ole integroituva välillä $[a, b]$. □

Lauseen 3.3 nojalla työssä käsitellään jatkossa vain rajoitettuja funktioita, sillä rajoittamattomat funktiot eivät ole Riemann-integroituvia. Käydään seuraavaksi läpi esimerkki, josta selviää, kuinka funktion $f(x) = x$ Riemann-integraalia ja sen olemassaoloa voidaan tutkia määritelmän 3.1 avulla.

Esimerkki 3.1 Olkoon $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ jokin välin $[a, b]$ jako, jossa jakopisteet toteuttavat ehdon $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, ja olkoon $c = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ jokin jakoon P liittyvä pistejoukko. Funktion $f(x) = x$ Riemannin summat välillä $[a, b]$ ovat muotoa

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1}). \tag{3.9}$$

Koska $x_{j-1} \leq c_j \leq x_j$ ja osavälin $[x_{j-1}, x_j]$ keskipiste on $(x_j - x_{j-1})/2$, niin voidaan pisteet c_j kirjoittaa osavälin keskipisteen ja luvun d_j summan avulla seuraavasti

$$c_j = \frac{(x_j - x_{j-1})}{2} + d_j, \tag{3.10}$$

missä

$$|d_j| \leq \frac{(x_j - x_{j-1})}{2} \leq \frac{\|P\|}{2}. \tag{3.11}$$

Kun summan (3.9) pisteet c_j kirjoitetaan yhtälön (3.10) avulla saadaan, että

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j - x_{j-1})}{2}(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^{n} d_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_j^2 - x_{j-1}^2) + \sum_{j=1}^{n} d_j(x_j - x_{j-1}). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nähdään, että suurin osa summan $\sum_{j=1}^{n}(x_j^2 - x_{j-1}^2)$ termeistä kumoaa toisensa seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}(x_j^2 - x_{j-1}^2) &= (x_1^2 - x_0^2) + (x_2^2 - x_1^2) + \cdots + (x_n^2 - x_{n-1}^2) \\ &= -x_0^2 + (x_1^2 - x_1^2) + (x_2^2 - x_2^2) + \cdots + (x_{n-1}^2 - x_{n-1}^2) + x_n^2 \\ &= x_n^2 - x_0^2 \\ &= b^2 - a^2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Samaan tapaan voidaan näyttää, että

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1}) = b - a. \tag{3.14}$$

Nyt summa (3.12) voidaan kirjoittaa uudelleen hyödyntäen yhtälöä (3.13)

$$\sigma = \frac{b^2 - a^2}{2} + \sum_{j=1}^{n} d_j(x_j - x_{j-1}). \tag{3.15}$$

Täten,

$$\begin{aligned}
\left|\sigma - \frac{b^2 - a^2}{2}\right| &= \left|\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j - x_{j-1})\right| && \text{yhtälö (3.15)} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |d_j|(x_j - x_{j-1}) && \left|\sum_{j=1}^{n} f(x)\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |f(x)| \\
&\leq \frac{\|P\|}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1}) && \text{epäyhtälö (3.11)} \\
&= \frac{\|P\|}{2}(b - a). && \text{yhtälö (3.14)}
\end{aligned}$$

Näin ollen, jokainen Riemannin summa yli välin $[a, b]$ jaon P pistein c toteuttaa määritelmän 3.1 ehdon

$$\left|\sigma - \frac{b^2 - a^2}{2}\right| < \epsilon, \text{ jos } \|P\| < \delta = \frac{2\epsilon}{b - a}.$$

Täten funktion f Riemann-integraali yli välin $[a, b]$ on

$$\int_a^b x\, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Esimerkistä ilmenee, että todistaakseen jonkin funktion Riemann-integraalin olemassaolon määritelmän 3.1 avulla, on selvitettävä integraalin arvo L tavalla tai toisella. Tämän arvon L löytäminen voi olla joissain tapauksissa haastavaa [3]. Lisäksi arvon L on toteuttava määritelmän 3.1 ehdot jokaisella jaolla P, jolle $\|P\| < \delta$, ja tämän jaon kaikilla mahdollisilla pistejoukoilla c, mikä lisää integraalin käsittelyn vaativuutta. Seuraavassa alaluvussa esitetään tapa käsitellä integraaleja ilman että tarvitsee tietää integraalin arvoa etukäteen tai käsitellä kaikki mahdolliset pistejoukot c.

3.2 Ala- ja yläintegraali

Määritelmä 3.2. Olkoon funktio f on rajoitettu suljetulla välillä $[a, b]$ ja $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ välin $[a, b]$ jako. Määritellään

$$M_j = \sup_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x)$$

ja

$$m_j = \inf_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x).$$

Funktion f *yläsumma* yli jaon P on

$$S(P) = \sum_{j-1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}),$$

ja funktion f *yläintegraali* yli välin $[a, b]$, jota merkitään

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx,$$

on infimum kaikista mahdollisista yläsummista. Funktion f *alasumma* yli jaon P on

$$s(P) = \sum_{j-1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}),$$

ja funktion f *alaintegraali* yli välin $[a, b]$, jota merkitään

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx,$$

on supremum kaikista mahdollisista alasummista.

Jos funktio f on rajoitettu eli $m \leq f(x) \leq M$ jokaisella $x \in [a, b]$, niin

$$m(b - a) \leq s(P) \leq S(P) \leq M(b - a) \tag{3.16}$$

jokaisella jaolla P, sillä

$$m \leq m_j \leq M_j \leq M \quad \text{jokaisella} \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

ja

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = b - a.$$

Täten funktion f yläsummien joukko yli kaikkien välin $[a, b]$ jakojen P on rajoitettu, samoin kuin alasummien joukko. Näin ollen täydellisyysaksiooman sekä lauseiden 2.2, 2.5 ja 2.6 nojalla $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx$ ja $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx$ ovat olemassa ja yksikäsitteisiä.

Lause 3.4. *Olkoon funktio f rajoitettu suljetulla välillä $[a, b]$ sekä P ja P' välin $[a, b]$ jakoja. Jos $P \subset P'$, niin tällöin*

$$s(P) \leq s(P') \quad \text{ja} \quad S(P') \leq S(P).$$

Todistus. Todistetaan lause induktiolla. Olkoon $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Lisätään jakoon P yksi piste c, jolloin saadaan hienonnus $P' = P \cup \{c\}$. Piste c sijaitsee jollain osavälillä

$[x_{j-1}, x_j]$. Jaetaan tämä osaväli kahteen osaan $[x_{j-1}, c]$ ja $[c, x_j]$. Nyt voidaan tutkia jakojen P ja P' yläsummien termejä välillä $[x_{j-1}, x_j]$, sillä yläsummien $S(P)$ ja $S(P')$ muut termit ovat samoja. Lausetta 2.3 hyödyntämällä saadaan, että

$$\begin{aligned}\sup_{x_{j-1}\le x\le x_j} f(x)(x_j - x_{j-1}) &= \sup_{x_{j-1}\le x\le x_j} f(x)(c - x_{j-1}) + \sup_{x_{j-1}\le x\le x_j} f(x)(x_j - c)\\ &\ge \sup_{x_{j-1}\le x\le c} f(x)(c - x_{j-1}) + \sup_{c\le x\le x_j} f(x)(x_j - c).\end{aligned}$$

Näin ollen $S(P') \le S(P)$.

Todistetaan nyt tapaus, jossa pisteitä lisätään k kappaletta. Olkoon $P'_k = P \cup \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$. Toisaalta jakoa P'_k voidaan merkitä seuraavasti $P'_k = P'_{k-1} \cup \{c_k\}$. Edellä todistettiin tapaus, jossa jakoon lisättiin yksi piste, joten

$$S(P'_k) \le S(P'_{k-1}) \le \cdots \le S(P'_1) \le S(P).$$

Lause seuraa tästä. Todistus alasummille menee samaan tapaan. □

Lauseen 3.4 mukaan jakoa P hienonnettaessa yläsumma joko pienenee tai säilyy yhtä suurena, ja alasumma vastaavasti joko kasvaa tai säilyy yhtä suurena. Seuraava lause osoittaa, että alasumma ei ole koskaan suurempaa kuin yläsumma, vaikka summat olisi otettu yli eri jakojen P_1 ja P_2.

Lause 3.5. *Olkoon funktio f rajoitettu suljetulla välillä $[a, b]$ sekä P_1 ja P_2 välin $[a, b]$ jakoja. Tällöin*

$$s(P_1) \le S(P_2).$$

Todistus. Olkoon $P = P_1 \cup P_2$ jakojen P_1 ja P_2 hienonnus. Nyt lauseen 3.4 ja yhtälön (3.16) nojalla

$$s(P_1) \le s(P) \le S(P) \le S(P_2).$$

□

Lause 3.6. *Olkoon funktio f rajoitettu suljetulla välillä $[a, b]$ ja olkoon P jokin välin $[a, b]$ jako. Tällöin*

(a) *yläsumma $S(P)$ yli jaon P on kaikkien Riemmannin summien yli jaon P muodostaman joukon supremum.*

(b) *alasumma $s(P)$ yli jaon P on kaikkien Riemannin summien yli jaon P muodostaman joukon infimum.*

Todistus. [3, Theorem 3.1.4] Todistetaan aluksi lauseen (a)-kohta. Jos $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, niin yläsumma yli jaon P on

$$S(P) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}), \tag{3.17}$$

missä

$$M_j = \sup_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x).$$

Mielivaltainen Riemannin summa yli jaon P on muotoa

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} f(c_j)(x_j - x_{j-1}),$$

missä $x_{j-1} \le c_j \le x_j$. Koska $f(c_j) \le M_j$ jokaisella $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, niin $\sigma \le S(P)$. Luvulla $S(P)$ on siis supremumin määritelmän 2.1 ominaisuus (a).

Olkoon nyt $\epsilon > 0$. Koska luvut M_j ovat funktion f supremumeja väleillä $[x_{j-1}, x_j]$, niin supremumin määritelmän 2.1 kohdan (b) nojalla voidaan valita sellaiset pisteet c_j väleiltä $[x_{j-1}, x_j]$, että

$$f(c_j) > M_j - \frac{\epsilon}{n(x_j - x_{j-1})}, \quad \text{missä} \quad 1 \le j \le n. \tag{3.18}$$

Esitetään nyt Riemannin summa näillä pisteillä

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sum_{j=1}^{n} f(c_j)(x_j - x_{j-1}) \\
&> \sum_{j=1}^{n} \left[M_j - \frac{\epsilon}{n(x_j - x_{j-1})} \right] (x_j - x_{j-1}) \quad \text{epäyhtälö (3.18)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} M_j (x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\epsilon}{n} \\
&= S(P) - \epsilon.
\end{aligned}$$

Luvulla $S(P)$ on siis supremumin määritelmän 2.1 ominaisuus (b). Täten $S(P)$ on kaikkien Riemannin summien yli jaon P muodostaman joukon supremum. Lauseen (b)-kohdan todistus menee samaan tapaan kuin (a)-kohdan. □

Ala- ja yläsummaa on havainnollistettu geometrisesti kuvassa 3.3. Kuvassa väli $[a, b]$ on jaettu viiteen osaväliin. Yläsumman pylväiden korkeus on

$$M_j = \sup_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x)$$

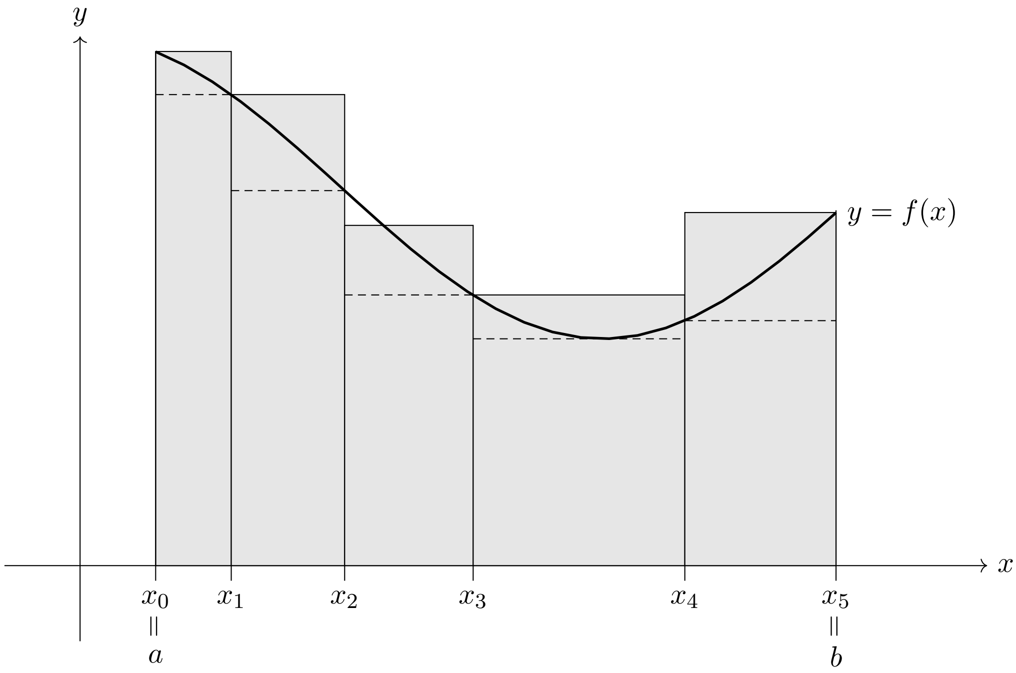
ja pylväät ovat yhtenäisellä viivalla piirrettynä kuvassa. Alasumman pylväiden korkeus on

$$m_j = \inf_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x)$$

ja pylväiden korkeus näkyy kuvassa katkoviivalla.

Kuvan perusteella on järkevää määritellä, että käyrän alla olevan pinta-alan A toteuttaa seuraavan ehdon

$$s(P) \le A \le S(P) \tag{3.20}$$



Kuva 3.3. *Ala- ja yläsumma geometrisesti.*

jokaisella välin $[a, b]$ jaolla P. Täten alan A on oltava kaikkien alasummien muodostaman joukon yläraja ja kaikkien yläsummien muodostamien joukon alaraja. Jos

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx, \tag{3.21}$$

niin on olemassa vain yksi luku A, jolla on tämä ominaisuus [3].
Tämä siksi että yläintegraali on infimum kaikista yläsummista, joten infimumin määritelmän 2.2 mukaan on olemassa jokin P_1, joka toteuttaa ehdon

$$S(P_1) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \epsilon, \quad \text{jokaisella } \epsilon > 0. \tag{3.22}$$

Vastaavasti alaintegraalille saadaan ehto

$$s(P_2) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \epsilon, \quad \text{jokaisella } \epsilon > 0. \tag{3.23}$$

Olkoon nyt $P = P_1 \cup P_2$. Yhtälö (3.20) saadaan lauseen 3.5 sekä yhtälöiden (3.22) ja (3.23) avulla muotoon

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \epsilon < s(P_2) \leq s(P) \leq A \leq S(P) \leq S(P_1) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \epsilon. \tag{3.24}$$

Koska (3.24) on voimassa jokaisella $\epsilon > 0$ ja (3.21), niin luvun A on oltava ylä- ja alaintegraalin arvo. Jos ehto (3.21) ei ole voimassa, niin lukua A ei ole määritelty. Seuraavassa luvussa 4 näytetään, että tämä määritelmä on yhtäpitävä määritelmän 3.1 kanssa.

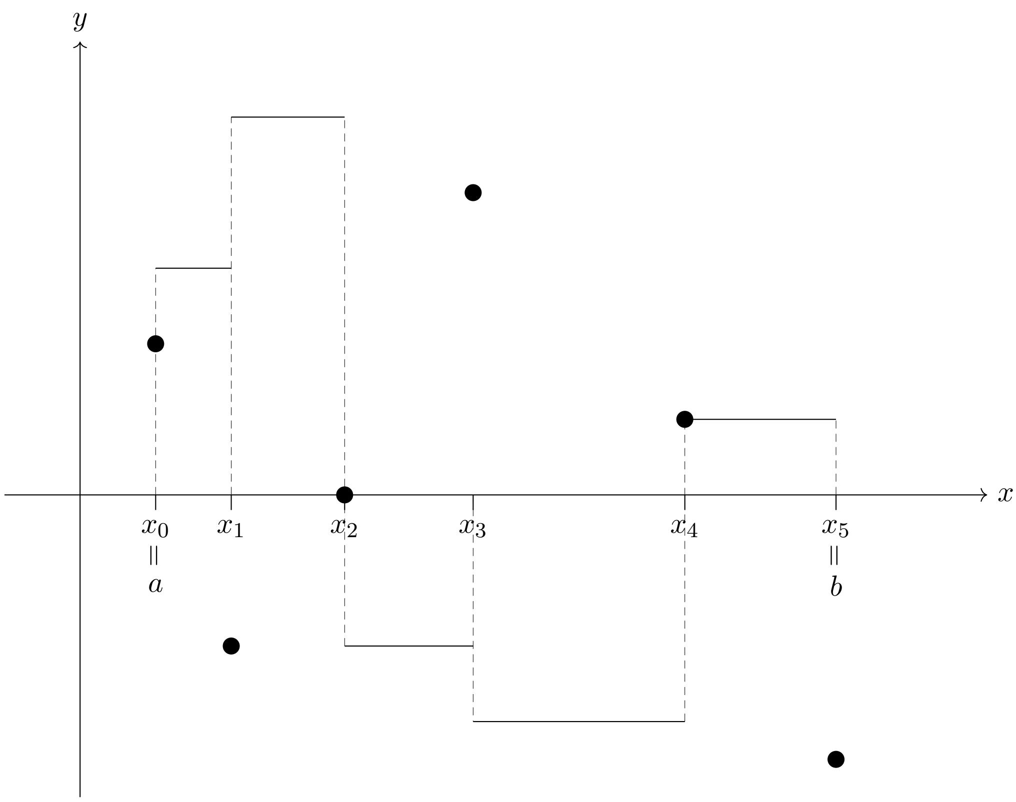
3.3 Ala- ja yläporrasfunktioiden integraalit

Ala- ja yläintegraali voidaan määritellä hyödyntäen ala- ja yläporrasfunktioiden integraaleja. Näiden porrasfunktioiden integraalit toimivat samantyylisesti kuin ala- ja yläsummat, mutta erona on käyttäytyminen jakopisteissä, ja se, että porrasfunktion arvot on mahdollista valita vapaammin.

Määritelmä 3.3. Olkoon funktio φ määritelty välillä $[a, b]$. Tällöin funktio φ on *porrasfunktio*, jos on olemassa välin $[a, b]$ jako $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ja sellainen luku a_j jokaisella $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, että

$$\varphi(x) = a_j \text{ kaikilla } x \in]x_{j-1}, x_j[.$$

Porrasfunktion määritelmä 3.3 vaatii vain, että porrasfunktio φ on määritelty jakopisteissä x_j, mutta ei aseta arvoille muita vaatimuksia. Porrasfunktion arvot jakopisteissä voidaan valita siis mielivaltaisesti, kuten kuvasta 3.4 voidaan havaita. Jos kuvan porrasfunktiolle valittaisiin jaoksi $P' = P \cup \{c\}$, missä c on jollain välillä $]x_{j-1}, x_j[$, niin porrasfunktion määritelmän 3.3 ehto $\varphi(x) = a_j$ olisi edelleen voimassa jokaisella $x \in]x_{j-1}, x_j[$. Täten on selvää, että porrasfunktio on olemassa myös jaolla P'. Näin ollen porrasfunktion φ välin $[a, b]$ jako ei ole yksikäsitteinen, vaan se voidaan tehdä monella tavalla.



Kuva 3.4. *Porrasfunktio geometrisesti.*

Määritelmä 3.4. Olkoon funktio f määritelty ja rajoitettu välillä $[a, b]$. Jos φ_A on välin $[a, b]$

porrasfunktio ja

$$\varphi_A(x) \leq f(x) \text{ kaikilla } x \in [a,b],$$

niin φ_A on funktion f alaporrasfunktio. Vastaavasti jos φ_Y on välin $[a,b]$ porrasfunktio ja

$$\varphi_Y(x) \geq f(x) \text{ kaikilla } x \in [a,b],$$

niin φ_Y on funktion f yläporrasfunktio.

Määritelmä 3.5. Olkoon φ porrasfunktio välillä $[a,b]$ ja P jokin välin $[a,b]$ jako, joka toteuttaa porrasfunktion määritelmän 3.3 ehdon. Tällöin porrasfunktion integraali $I(\varphi)$ yli välin $[a,b]$ on

$$I(\varphi) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x_j - x_{j-1}).$$

Porrasfunktion integraalin arvon kannalta ei ole väliä, millaisia arvoja porrasfunktio saa jakopisteissä. Porrasfunktion integraali ei myöskään riipu välin $[a,b]$ jaosta P, kuten seuraava lause 3.7 osoittaa.

Lause 3.7. *Porrasfunktion integraali $I(\varphi)$ on hyvin määritelty. Toisin sanoen se ei riipu valitusta jaosta P.*

Todistus. Olkoon P porrasfunktion φ jako ja olkoon $P' = P \cup \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ jaon P hienonnus, johon on lisätty k kappaletta pisteitä. Aiemmin todettiin, että porrasfunktio φ on olemassa myös jaolla P'.

Tutkitaan aluksi tapausta, jossa jakoon P on lisätty vain yksi piste c_1, jolloin on saatu hienonnus $P'_1 = P \cup \{c_1\}$. Nyt integraalien $I(\varphi, P)$ ja $I(\varphi, P'_1)$ termit ovat muuten samoja paitsi välillä $]x_{j-1}, x_j[$, jolla piste c_1 sijaitsee. Koska tällä välillä

$$a_j(c_1 - x_{j-1}) + a_j(x_j - c_1) = a_j(x_j - x_{j-1}),$$

niin

$$I(\varphi, P) = I(\varphi, P'_1).$$

Nyt voidaan ajatella, että yksittäinen piste c_i lisätään k kertaa jakoon P'_{i-1}, missä $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ ja $P'_0 = P$. Tällöin saadaan, että

$$I(\varphi, P) = I(\varphi, P'_1) = \cdots = I(\varphi, P'_k).$$

Näin ollen porrasfunktion integraali on sama valitulla jaolla P ja jaon hienonnuksella P'. Olkoot nyt P_1 ja P_2 mitä tahansa porrasfunktion määritelmän 3.3 ehdon toteuttavia jakoja ja $P' = P_1 \cup P_2$. Koska P' on jaon P_1 hienonnus, niin aiemman perusteella $I(\varphi, P_1) =$

$I(\varphi, P')$. P' on myös jaon P_2 hienonnus, joten $I(\varphi, P_2) = I(\varphi, P')$. Näin ollen

$$I(\varphi, P_1) = I(\varphi, P') = I(\varphi, P_2).$$

Täten porrasfunktion integraali ei riipu valitusta jaosta. $\square$

4 RIEMANN-INTEGROITUVUUS

Jokaiselle rajoitetulle funktiolle f on määritelty sekä alaintegraali $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ että yläintegraali $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, mutta luku $L = \int_a^b f(x)\,dx$ on määritelty vain, jos funktio f on Riemann-integroituva. Alaluvussa 4.1 todistetaan lauseessa 4.3, että Riemann-integroituvuus voidaan osoittaa määritelmän 3.1 sijaan yhtäpitävästi vaatimalla, että ala- ja yläintegraalit ovat yhtä suuret. Jos ala- ja yläintegraalit eivät ole yhtä suuret, niin funktio f ei ole Riemann-integroituva. Alaluvun 4.1 lauseiden todistukset mukailevat Trenchin kirjan [3] alaluvun 3.2 vastaavien lauseiden(Theorem) todistuksia. Alaluvussa 4.2 osoitetaan, että ala- ja yläintegraalissa voidaan ala- ja yläsummien sijaan käyttää myös ala- ja yläporrasfunktioiden integraaleja. Täten myös näillä voidaan määrittää funktion Riemann-integroituvuus, kun tutkitaan ovatko ala- ja yläintegraalit yhtä suuret.

4.1 Ala- ja yläintegraalien yhteys Riemann-integraaliin

Lause 4.1. *Oletetaan, että*

$$|f(x)| \leq M, \quad a \leq x \leq b,$$

ja olkoon P' suljetun välin $[a, b]$ jaon $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ hienonnus, joka on saatu lisäämällä r kappaletta pisteitä jakoon P. Tällöin

$$S(P) \geq S(P') \geq S(P) - 2Mr\|P\|$$

ja

$$s(P) \leq s(P') \leq s(P) + 2Mr\|P\|.$$

Todistus. Todistetaan aluksi lause yläsummille. Olkoon $r = 1$ ja P' jaon $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ hienonnus, joka on saatu lisäämällä piste c jakoon P. Erotuksessa $S(P) - S(P')$ kaikki muut termit kumoutuvat paitsi sen välin $[x_{i-1}, x_i]$, joka sisältää pisteen c. Näin ollen, jos

$$M_{i1} = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq c} f(x) \quad \text{ja} \quad M_{i2} = \sup_{c \leq x \leq x_i} f(x),$$

niin tällöin

$$\begin{aligned} S(P) - S(P') &= M_i(x_i - x_{i-1}) - M_{i1}(c - x_{i-1}) - M_{i2}(x_i - c) \\ &= (M_i - M_{i1})(c - x_{i-1}) + (M_i - M_{i2})(x_i - c). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Koska $|f(x)| \leq M$ ja lauseen 2.3 nojalla $M_i \geq M_{it}$, niin

$$0 \leq M_i - M_{it} \leq 2M, \quad t = 1, 2.$$

Nyt yhtälölle (4.1) saadaan arvio

$$0 \leq S(P) - S(P') \leq 2M(x_i - x_{i-1}) \leq 2M\|P\|. \tag{4.2}$$

Todistetaan seuraavaksi tapaus, jossa $r > 1$. Olkoon siis $r > 1$ ja P' hienonnus, joka on saatu jaosta P lisäämällä tähän r kappaletta pisteitä $c_1, c_2, \ldots, c_r$. Merkitään $P^{(0)} = P$. Jokainen hienonnus $P^{(j)}$, johon on lisätty j kappaletta pisteitä, saadaan muodostettua jaosta $P^{(j-1)}$ lisäämällä tähän piste c_j. Nyt yhtälöstä (4.2) seuraa, että

$$0 \leq S(P^{(j-1)}) - S(P^{(j)}) \leq 2M\|P^{(j-1)}\|, \quad \text{kun } 1 \leq j \leq r. \tag{4.3}$$

Kun yhtälön (4.3) muotoa olevat yhtälöt lasketaan yhteen jokaisella $1 \leq j \leq r$, niin suurin osa termeistä $S(P^{(j)})$ kumoaa toisensa ja saadaan, että

$$0 \leq S(P^{(0)}) - S(P^{(r)}) \leq 2M(\|P^{(0)}\| + \|P^{(1)}\| + \cdots + \|P^{(r-1)}\|). \tag{4.4}$$

Koska $P^{(0)} = P$, $P^{(r)} = P'$ ja $\|P^{(k)}\| \leq \|P^{(k-1)}\|$ jokaisella $1 \leq k \leq r-1$, niin epäyhtälö (4.4) saadaan nyt muotoon

$$0 \leq S(P) - S(P') \leq 2Mr\|P\|.$$

Lause yläsummille seuraa tästä. Todistus alasummille menee samaan tapaan. □

Lause 4.1 antaa rajan sille, kuinka paljon yläsumma voi pienentyä ja alasumma voi kasvaa jakoa hienonnettaessa. Infimumin määritelmästä saadaan, että jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa jokin jako P_1, joka toteuttaa ehdon

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(P_1) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \epsilon. \tag{4.5}$$

Seuraava lause osoittaa, että voidaan löytää luku $\delta > 0$ niin, että tämä yhtälö on voimassa kaikilla jaoilla P, joilla $\|P\| < \delta$. Erityisesti jos jako P toteuttaa yhtälön (4.5), niin jaon P hienonnus P' toteuttaa myös yhtälön. Vastaava tulos saadaan alasummille.

Lause 4.2. *Jos funktio f rajoitettu suljetulla välillä $[a, b]$ ja $\epsilon > 0$, niin tällöin on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(P) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \epsilon$$

ja

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq s(P) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \epsilon,$$

jos $\|P\| < \delta.$

Todistus. Todistetaan lause aluksi yläintegraalille ja yläsummalle. Oletetaan, että funktio f on rajoitettu välillä $[a, b]$. Ehto $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(P)$ on voimassa kaikilla jaoilla P alaintegraalin määritelmän 3.2 ja infimumin määritelmän 2.2 kohdan (a) nojalla. Koska funktio f on rajoitettu, niin $|f(x)| \leq M$, kun $a \leq x \leq b$. Määritelmistä 3.2 ja 2.2 saadaan, että

$$S(P_0) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2} \tag{4.6}$$

jollakin jaolla $P_0 = \{x_0, x_1, \ldots, x_{r+1}\}$. Olkoon P mikä tahansa välin $[a, b]$ jako. Nyt jakojen P ja P_0 yhdiste $P' = P \cup P_0$ toteuttaa lauseen 3.4 perusteella ehdon

$$S(P') \leq S(P_0). \tag{4.7}$$

Koska P' on jaon P hienonnus, joka on saatu lisäämällä enintään r kappaletta pisteitä jakoon P, niin lauseesta 4.1 seuraa, että

$$S(P') \geq S(P) - 2Mr\|P\|. \tag{4.8}$$

Nyt epäyhtälöistä (4.6), (4.7) ja (4.8) saadaan, että

$$\begin{aligned} S(P) &\leq S(P') + 2Mr\|P\| \\ &\leq S(P_0) + 2Mr\|P\| \\ &< \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2} + 2Mr\|P\|. \end{aligned}$$

Täten

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(P) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \epsilon$$

on voimassa, jos

$$\|P\| < \delta = \frac{\epsilon}{4Mr}.$$

Todistus alaintegraalille ja alasummalle menee samaan tapaan. □

Lause 4.3. *Rajoitettu funktio f on Riemann-integroituva suljetulla välillä $[a, b]$, jos ja vain jos*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = L.$$

Tällöin $L = \int_a^b f(x)\,dx.$

Todistus. Todistetaan ensiksi, että jos funktio f on integroituva, niin

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Olkoon P välin $[a, b]$ jako ja σ funktion f Riemannin summa yli jaon P. Koska

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \left(\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - S(P)\right) + (S(P) - \sigma) + \left(\sigma - \int_a^b f(x)\,dx\right),$$

niin kolmioepäyhtälöstä seuraa, että

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le \left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - S(P)\right| + |S(P) - \sigma| + \left|\sigma - \int_a^b f(x)\,dx\right|. \quad (4.9)$$

Olkoon nyt, että $\epsilon > 0$. Määritelmien 3.2 ja 2.2 nojalla on olemassa sellainen jako P_0, jolle

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(P_0) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\epsilon}{3}. \quad (4.10)$$

Määritelmän 3.1 mukaan on olemassa $\delta > 0$, jolle

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sigma\right| < \frac{\epsilon}{3}, \quad (4.11)$$

jos $\|P\| < \delta$. Olkoon nyt P jaon P_0 hienonnus ja $\|P\| < \delta$. Lauseen 3.4 nojalla $S(P) \le S(P_0)$ ja täten yhtälöstä (4.10) seuraa, että

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(P) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\epsilon}{3},$$

joten

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - S(P)\right| < \frac{\epsilon}{3}, \quad (4.12)$$

jos $\|P\| < \delta$. Nyt yhtälöistä (4.9), (4.11) ja (4.12) seuraa, että ehto

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \frac{2\epsilon}{3} + |S(P) - \sigma| \quad (4.13)$$

on voimassa jokaisella funktion f Riemannin summalla σ yli jaon P. Koska lauseen 3.6 kohdan (a) nojalla yläsumma $S(P)$ on Riemannin summien muodostaman joukon supremum, niin supremumin määritelmän 2.1 mukaan on olemassa Riemannin summa σ, jolle

$$|S(P) - \sigma| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (4.14)$$

Nyt sijoittamalla (4.14) yhtälöön (4.13) seuraa, että

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \epsilon.$$

Koska ϵ voi olla mielivaltaisen pieni positiivinen luku, niin tästä seuraa, että

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Vastaavasti voidaan todistaa, että

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Täten jos funktio f on integroituva, niin

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = L,$$

missä $L = \int_a^b f(x)\,dx$.

Todistetaan seuraavaksi lause toiseen suuntaan eli jos funktio f on rajoitettu välillä $[a, b]$ ja

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = L, \tag{4.15}$$

niin funktio f on integroituva välillä $[a, b]$ ja $L = \int_a^b f(x)\,dx$.
Jos $\epsilon > 0$, niin lauseen 4.2 nojalla on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \epsilon < s(P) \leq S(P) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \epsilon, \tag{4.16}$$

jos $\|P\| < \delta$. Jos σ on funktion f Riemannin summa yli jaon P, niin suoraan määritelmästä 3.2 saadaan, että

$$s(P) \leq \sigma \leq S(P),$$

joten yhtälöistä (4.15) ja (4.16) seuraa, että

$$\begin{aligned} L - \epsilon < \sigma < L + \epsilon \\ \Leftrightarrow |\sigma - L| < \epsilon \end{aligned}$$

jos $\|P\| < \delta$. Luku L toteuttaa siis määritelmän 3.1 ehdon ja täten $L = \int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

4.2 Ala- ja yläporrasfunktioiden integraalien yhteys Riemann-integraaliin

Alaporrasfunktiossa $\varphi_A(x)$ luvut a_j ovat alarajoja funktion f arvoilla väleillä $]x_{j-1}, x_j[$. Alaporrasfunktion arvot jakopisteissä eivät vaikuta alaporrasfunktion integraalin arvoon.

Jos luvuksi a_j valitaan funktion f infimum välillä $]x_{j-1}, x_j[$ eli luku

$$a_j = \inf_{x_{j-1} < x < x_j} f(x),$$

niin nähdään, että alaporrasfunktion integraali muistuttaa paljon alasummaa $s(P)$. Ainoana erona on, että alasummassa infimumia otettaessa huomioidaan välin päätepisteet toisin kuin alaporrasfunktion luvuissa a_j. Vastaava havainto voidaan tehdä yläporrasfunktion integraalille ja yläsummalle. Hyödynnetään tätä havaintoa seuraavan lauseen 4.4 todistamisessa.

Lause 4.4. *Olkoon funktio f rajoitettu suljetulla välillä $[a, b]$. Tällöin*

$$\begin{aligned}\overline{\int_a^b} f(x)\,dx &= \inf\{S(P) : P \textit{ on välin } [a,b] \textit{ jako}\} \\ &= \inf\{I(\varphi_Y) : I(\varphi_Y) \textit{ on välin } [a,b] \textit{ yläporrasfunktion integraali}\}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\underline{\int_a^b} f(x)\,dx &= \sup\{s(P) : P \textit{ on välin } [a,b] \textit{ jako}\} \\ &= \sup\{I(\varphi_A) : I(\varphi_A) \textit{ on välin } [a,b] \textit{ alaporrasfunktion integraali}\}.\end{aligned}$$

Todistus. Todistetaan aluksi alaintegraalin ja alaporrasfunktioiden integraalien välinen yhteys. Olkoon $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ jokin välin $[a, b]$ jako. Alasumma jaolla P on muotoa

$$s(P) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}), \text{ missä } m_j = \inf_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x).$$

Valitaan alaporrasfunktiossa φ_A luvuiksi a_j funktion f infimum välillä $]x_{j-1}, x_j[$, jolloin sen integraali on muotoa

$$I(\varphi_A) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x_j - x_{j-1}), \text{ missä } a_j = \inf_{x_{j-1} < x < x_j} f(x).$$

Lauseen 2.7 nojalla nojalla $s(P) \le I(\varphi_A)$ kaikilla jaoilla P, sillä $m_j \le a_j$ jokaisella $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Täten

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \sup\{I(\varphi_A) : I(\varphi_A) \text{ on välin } [a,b] \text{ alaporrasfunktion integraali}\}. \tag{4.17}$$

Olkoot nyt φ_A mikä tahansa alaporrasfunktio välin $[a, b]$ jaolla $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ja $\epsilon > 0$. Muodostetaan jaon P hienonnus P' lisäämällä jokaiselle jaon P osavälille $[x_{j-1}, x_j]$ kuvan 4.1 mukaisesti sellaiset pisteet c_{j1} ja c_{j2}, että

$$c_{j1} - x_{j-1} < \frac{\epsilon}{4nM} \quad \text{ja} \quad x_j - c_{j2} < \frac{\epsilon}{4nM}. \tag{4.18}$$

Tutkitaan nyt erotuksen $I(\varphi_A) - s(P')$ termejä yksittäisellä jaon P osavälillä $[x_{j-1}, x_j]$. Tällä osavälillä erotus on muotoa

$$
\begin{aligned}
a_j(x_j - x_{j-1}) - (m_{j1}(c_{j1} - x_j) + m_{j2}(c_{j2} - c_{j1}) \\
\quad + m_{j3}(x_j - c_{j2})) \\
&= (a_j - m_{j2})(c_{j2} - c_{j1}) \\
&\quad + ((a_j - m_{j1})(c_{j1} - x_j) + (a_j - m_{j3})(x_j - c_{j2})) \\
&\leq 0 + (a_j - m_{j1})(c_{j1} - x_j) + (a_j - m_{j3})(x_j - c_{j2}) && \text{lause 2.7} \\
&\leq 2M(c_{j1} - x_j) + 2M(x_j - c_{j2}) && |f(x)| \leq M,\ |\varphi_A| \leq M \\
&< \frac{2M\epsilon}{4nM} + \frac{2M\epsilon}{4nM} && \text{yhtälö 4.18} \\
&= \frac{\epsilon}{n}.
\end{aligned}
$$

Tällainen arvio voidaan tehdä jokaiselle jaon P osavälille $[x_{j-1}, x_j]$. Näitä osavälejä on n kappaletta, joten

$$I(\varphi_A) - s(P') < \frac{\epsilon}{n} + \cdots + \frac{\epsilon}{n} = \frac{n\epsilon}{n} = \epsilon.$$

Näin ollen alasumma $s(P')$ saadaan mielivaltaisen lähelle tai yli alaporasfunktion integraalin $I(\varphi_A)$, toisin sanoen $s(P') \geq I(\varphi_A)$. Täten

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq \sup\{I(\varphi_A) : I(\varphi_A) \text{ on välin } [a,b] \text{ alaporrasfunktion integraali}\}. \tag{4.19}$$

Lause seuraa yhtälöistä (4.17) ja (4.19). Todistus yläporrasfunktion integraalille ja yläsummalle saadaan vastaavasti. □

Kuva 4.1. *Osavälille $[x_{j-1}, x_j]$ lisättävät pisteet c_{j1} ja c_{j2}.*

Lauseiden 4.3 ja 4.4 nojalla jonkin funktion f Riemann-integroituvuus voidaan todistaa myös osoittamalla, että alaporrasfunktioiden integraalien muodostaman joukon supremum ja yläporrasfunktioiden integraalien muodostaman joukon infimum ovat yhtä suuria.

5 YHTEENVETO

Tässä työssä tutkittiin Riemann-integraalin määritelmiä. Integraali määriteteltiin Riemannin summien raja-arvona, kun jaon normia $\|P\|$ pienennetään. Tässä rajaprosessissa otetaan kuitenkin huomioon kaikki mahdolliset jaot P ja pisteet c. Riemann-integraalia havainnollistettiin geometrisesti ja todettiin sen arvon vastaavan käyrän alla olevaa pinta-alaa, jos funktio on Riemann-integroituva.

Työssä todistettiin, että Riemann-integraalin voi yhtäpitävästi määritellä asettamalla ala- ja yläintegraalit yhtä suuriksi. Jos ala- ja yläintegraalit ovat eri suuret, ei funktio ole Riemann-integroituva kyseisellä välillä. Riemannin summaan perustuvaa määritelmää hankaloittavat pisteiden c valinnanvapaus ja se, että integraalin arvo on löydettävä etukäteen, mikä tuotiin esille esimerkin 3.1 yhteydessä. Nämä vaikeudet vältetään käyttämällä ala- ja yläintegraalia Riemann-integraalin tutkimisessa.

Ala- ja yläintegraaliin liittyvät oleellisesti supremumin eli pienimmän ylärajan ja infimumin eli suurimman alarajan käsiteet, joita käsiteltiin työn alkupuolella. Työssä määriteltiin alaintegraali alasummien supremumina ja yläintegraali yläsummien infimumina. Ala- ja yläintegraaleissa voidaan ala- ja yläsumman sijaan käyttää ala- ja yläporrasfunktioiden integraaleja. Tämä osoitettiin työssä yhtäpitäväksi tavaksi määritellä ala- ja yläintegraali. Erona alasummalla ja alaporrasfunktiolla on näiden käyttäytyminen jakopisteissä ja se, että alaporrasfunktion arvot on mahdollista valita vapaammin. Yläsumman ja yläporrasfunktion integraalin ero on vastaava.

LÄHDELUETTELO

[1] A. Browder. *Mathematical Analysis: An Introduction*. New York: Springer-Verlag, 1996.

[2] T. Kilpeläinen. *Analyysi 2*. 2001-2003. URL: http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATA112.pdf (viitattu 23. 05. 2019).

[3] W. F. Trench. *Introduction to Real Analysis*. New Jersey: Pearson Education, 2003.

[4] N. Vakil. *Real analysis through modern infinitesimals*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.